

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

11 классы

Задача 1

В-1 Решите уравнение

$$\sqrt{6(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 4 \sin x.$$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Решение. При условиях $\sin x \geq 0$ и $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ возведем обе части равенства в квадрат и воспользуемся тождеством $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$6 - 6 \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 16(1 - \cos^2 x).$$

Замена $t = \cos^2 x \quad (t \geq 0)$:

$$6 - 6 \frac{1 - t}{t} = 16(1 - t).$$

Домножая обе части равенства на t , получаем уравнение

$$16t^2 - 4t - 6 = 0.$$

Из двух его решений $3/4$ и $-1/2$ нам подходит только положительное, т.е. $\cos^2 x = 3/4$, откуда $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm \pi/6 + 2\pi n, \pm 5\pi/6 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. С учётом ограничений получим ответ $x = \pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

В-2 Решите уравнение

$$\sqrt{6(1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = 4 \cos x.$$

Ответ: $x = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

В-3 Решите уравнение

$$\sqrt{3(1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \cos x.$$

Ответ: $x = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

В-4 Решите уравнение

$$\sqrt{3(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \sin x.$$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2

В-1 В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму первого из них, шестого и последнего.

Ответ: 1782

Решение. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n . Поскольку $n = 9m \cdot S(n)$, то n кратно 9, а значит, и $S(n)$ тоже кратно 9. Отсюда следует, что n кратно 81. Исходя из этого, а также того, что n трехзначное, n может принимать значения 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891 или 972. Если $S(n) = 9$, то условия задачи выполнены, так как $\frac{n}{S(n)}$ кратно 9. Значит, $n = 162, 243, 324, 405$ и 810 подходят. Если $S(n) = 18$, то прямой проверкой убеждаемся, что 486, 648 и 972 подходят, а 567, 729 и 891 нет – они даже не делятся на сумму своих цифр. Таким образом, существует 8 таких трехзначных чисел: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810 и 972. Искомая сумма:

$$162 + 648 + 972 = 81 \cdot (2 + 8 + 12) = 81 \cdot 22 = 1782.$$

В-2 В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму второго из них, пятого и предпоследнего.

Ответ: 1539

В-3 В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму третьего из них, пятого и предпоследнего.

Ответ: 1620

В-4 В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму второго из них, шестого и последнего.

Ответ: 1863

Задача 3

В-1 Пусть F — множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими по модулю 5. Найдите количество прямоугольных треугольников, все вершины которых принадлежат F , а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

Ответ: 399300

Решение. Поскольку две стороны треугольника параллельны осям координат, каждый из треугольников расположен в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей. Пусть это будет плоскость $z = 0$. Найдём количество прямоугольников в этой плоскости, координаты вершин которых — натуральные числа, удовлетворяющие условиям $x \in [-5, 5], y \in [-5, 5], z = 0$, а стороны параллельны осям x, y . Нам нужно выбрать две вертикальные прямые из 11 и две горизонтальные прямые из 11. Таким образом, всего получится

$$C_{11}^2 \cdot C_{11}^2 = \left(\frac{11 \cdot 10}{2} \right)^2 = 55^2 = 3025 \quad \text{прямоугольников.}$$

Каждый прямоугольник порождает 4 прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условиям задачи. (Важно, что ни один из этих четырёх треугольников не может быть порожден другим прямоугольником.) Таким образом, количество прямоугольных треугольников в плоскости $z = 1$ равно $3025 \cdot 4 = 12100$. Точно такое же количество треугольников будет при $z = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5$. Аналогично рассматриваются плоскости, параллельные другим координатным плоскостям. В результате количество прямоугольных треугольников равно

$$12100 \cdot 11 \cdot 3 = 399300.$$

В-2 Пусть F — множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими по модулю 6. Найдите количество прямоугольных треугольников, все вершины которых принадлежат F , а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

Ответ: 949104

В-3 Пусть F — множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими по модулю 4. Найдите количество прямоугольных треугольников, все вершины которых принадлежат F , а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

В-4 Пусть F — множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими по модулю 3. Найдите количество прямоугольных треугольников, все вершины которых принадлежат F , а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

Ответ: 37044

Задача 4

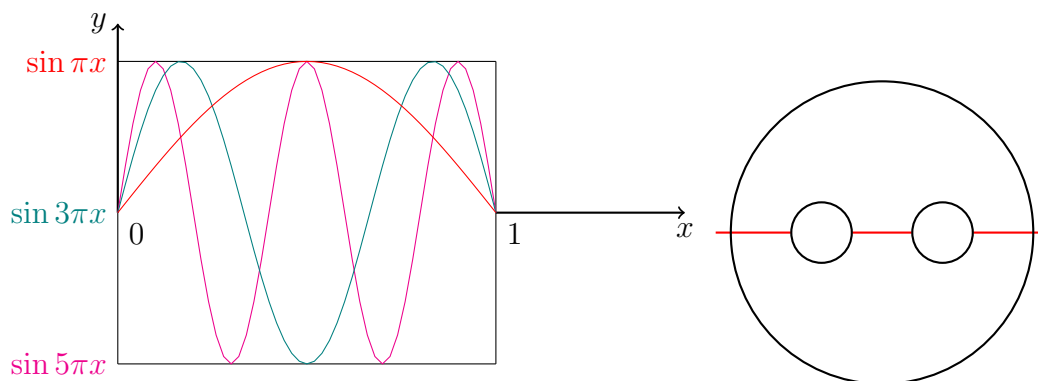
В-1

На прямоугольной полоске $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ построили графики функций $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{11, 13, 17\}$. На сколько непересекающихся областей окажется разделена эта полоска?

Ответ: 87

Решение.

Проиллюстрируем на примере $k \in \{1, 3, 5\}$.



Предположим, прямоугольник разделён на сколько-то частей линиями. Представим, что мы провели поверх этих линий новую, из точки $(0, 0)$ в $(1, 0)$ — как вырастет число областей?

На новой линии, помимо общих для всех $(0, 0)$ и $(1, 0)$, окажется сколько-то точек пересечения со старыми, допустим, n . Вместе с концами это $n + 2$ точки, и, следовательно, новая линия будет разбита на $n + 1$ отрезок. Каждый из отрезков отсечёт по одному новому куску, то есть областей станет больше на $n + 1$.

Для линий произвольной формы, конечно, такое правило будет неверно (см. пример на рисунке «пуговицы») — но в условиях задачи таких областей не получится. Действительно, если двум, трём, или более «отрезкам» соответствует всего один новый кусок — это значит, что область была с отверстиями. Однако в нашем случае всякая область поддаётся описанию как область между какими-то двумя графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (возможно, заданными кусочно). Следовательно, отверстия внутри области мы не увидим — каждый вертикальный срез области $f(x) \leq y \leq g(x)$ при фиксированном x будет выглядеть как вертикальный отрезок $y \in [f(x), g(x)]$.

Значит, остаётся подсчитать число пересечений синусоид друг с другом. Для двух отдельно взятых синусоид это задача несложная:

$$\sin \pi kx = \sin \pi lx, \quad x \in (0, 1), \quad k \neq l \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \pi kx - \sin \pi lx = 0$$

$$2 \cos \pi \frac{k+l}{2} x \cdot \sin \pi \frac{k-l}{2} x = 0$$

$$\pi \frac{k+l}{2} x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pi \frac{k-l}{2} x = \pi n,$$

$$x = \frac{2n+1}{k+l}, \quad x = \frac{2n}{k-l}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 1).$$

Также несложно найти точки пересечения синусоид с верхней и нижней границей:

$$\sin \pi kx = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{4n \pm 1}{2k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 1).$$

Однако мы должны смотреть на пересечения $\sin \pi kx$ со всеми предшествующими синусоидами и сторонами в целом. Нельзя просто сложить полученные количества корней, так как корни иногда совпадают. Например, синусоида $y = \sin 5\pi x$ пересекает как $y = 1$, так и $y = \sin \pi x$ в точке $x = \frac{1}{2}$. Такие случаи необходимо учитывать и отслеживать повторяющиеся точки для каждого k .

Напишем таблицу, показывающую количество пересечений, растущее с каждой новой синусоидой. В ячейках написаны пересечения $y = \sin k\pi x$ с $y = \sin l\pi x$ (или с $y = \pm 1$). Формулы для всех корней в общем виде были выведены выше. Везде $n \in \mathbb{Z}$ выбрано так, чтобы $x \in (0, 1)$, откуда мы получаем количество корней. В скобках указано число корней на ячейку (если дроби две, то просто складываем число корней для каждой) минус число корней, которые в этой строке до этого места уже встречались. В последней графе подводится итог. Без каких-либо синусоид у нас область одна — сам прямоугольник, поэтому на «нулевой» строке значение итога равно 1. Дальше к накопленному значению прибавляется количество новоотсечённых областей, которое на 1 больше количества корней, то есть прирост на 1 больше суммы чисел в скобках по строке. Отсюда складывается ответ — в нижнем левом углу таблицы.

Вариант 1:

k	$y = \pm 1$	$l = 11$	$l = 13$	Σ
11	$\frac{4n \pm 1}{22}$ (11)			13
13	$\frac{4n \pm 1}{26}$ (13)	$\frac{2n+1}{24}; (12)$		39
17	$\frac{4n \pm 1}{34}$ (17)	$\frac{2n+1}{28}; \frac{2n}{6}; (16)$	$\frac{2n+1}{30}; \frac{2n}{4}; (16 - 2)$	87

Вариант 2:

k	$y = \pm 1$	$l = 11$	$l = 15$	Σ
11	$\frac{4n \pm 1}{22}$ (11)			13
15	$\frac{4n \pm 1}{30}$ (15)	$\frac{2n+1}{26}; \frac{2n}{4}; (14 - 2)$		41
17	$\frac{4n \pm 1}{34}$ (17)	$\frac{2n+1}{28}; \frac{2n}{6}; (16)$	$\frac{2n+1}{32}; (16)$	91

Вариант 3:

k	$y = \pm 1$	$l = 11$	$l = 13$	Σ
11	$\frac{4n \pm 1}{22}$ (11)			13
13	$\frac{4n \pm 1}{26}$ (13)	$\frac{2n+1}{24}; (12)$		39
15	$\frac{4n \pm 1}{30}$ (15)	$\frac{2n+1}{26}; \frac{2n}{4}; (14 - 2)$	$\frac{2n+1}{28}; (14)$	81

Вариант 4:

k	$y = \pm 1$	$l = 13$	$l = 15$	Σ
13	$\frac{4n \pm 1}{26}$ (13)			15
15	$\frac{4n \pm 1}{30}$ (15)	$\frac{2n+1}{28}; (14)$		45
17	$\frac{4n \pm 1}{34}$ (17)	$\frac{2n+1}{30}; \frac{2n}{4}; (16 - 2)$	$\frac{2n+1}{32}; (16)$	93

В-2

На прямоугольной полоске $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ построили графики функций $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{11, 15, 17\}$. На сколько непересекающихся областей окажется разделена эта полоска?

Ответ: 91

В-3

На прямоугольной полоске $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ построили графики функций $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{11, 13, 15\}$. На сколько непересекающихся областей окажется разделена эта полоска?

Ответ: 81

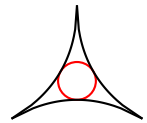
В-4

На прямоугольной полоске $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ построили графики функций $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{13, 15, 17\}$. На сколько непересекающихся областей окажется разделена эта полоска?

Ответ: 93

Задача 5**В-1**

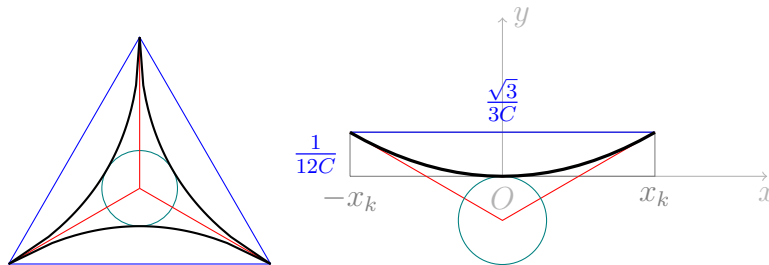
Три графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «треугольник» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «треугольник» окружности, если измеренное по прямой расстояние между соседними вершинами треугольника равно 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Решение. Посмотрим на треугольник из парабол. Если его «углы» нулевые — то это значит, что касательные парабол в вершинах совпали (красные линии на рисунке). Значит, касательные должны пересечься под углом 120° .

Повернув одну из сторон так, чтобы она описывалась графиком $y = Cx^2$, который нарисован от точки касания до точки касания, $x \in [-x_k, x_k]$. Симметричность рисунка очевидна. Требование «касательные должны пересечься под углом 120° » превращается в условие «угол наклона касательной к параболе $y = Cx^2$ в точке x_k равен 30° ». Отсюда можно найти все параметры рисунка:



$$y' = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 2Cx, \quad 2Cx_k = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_k = \frac{\sqrt{3}}{6C}, \quad y_k = C(x_k)^2 = \frac{1}{12C}.$$

Получилось, что парабола поместилась в прямоугольник высотой $\frac{1}{12C}$ и шириной $\frac{\sqrt{3}}{3C}$. Осталось заметить, что радиус вписанной окружности — это в точности расстояние от точки пересечения красных касательных до точки $(0, 0)$. Найти точку пересечения этих касательных несложно — она окажется в $(0, -\frac{1}{12C})$. При этом ширина прямоугольника — это как раз расстояние между соседними вершинами, равное 1 по условию.

Значит, $\frac{\sqrt{3}}{3C} = 1$, $\frac{1}{C} = \sqrt{3}$, искомый радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Для вариантов с другими фигурами рассуждения аналогичны — просто углы пересечения касательных другие.

В квадрате касательные должны быть под углом 45° к оси. Парабола впишется в прямоугольник высотой $\frac{1}{4C}$ и шириной $\frac{1}{C}$. Пересекутся касательные в точке $(0, -\frac{1}{4C})$. Радиус равен $\frac{1}{4}$.

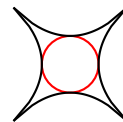
В шестиугольнике касательные должны быть под углом 60° к оси. Парабола впишется в прямоугольник высотой $\frac{3}{4C}$ и шириной $\frac{\sqrt{3}}{C}$. Пересекутся касательные в точке $(0, -\frac{3}{4C})$. Радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

В вариантах, где требуется найти отношение радиусов, достаточно выразить отношение радиуса описанной окружности к стороне многоугольника.

В-2

Четыре графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «квадрат» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «квадрат» окружности, если измеренное по прямой расстояние между соседними вершинами квадрата равно 1.

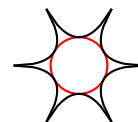
Ответ: $\frac{1}{4}$



В-3

Шесть графиков параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «шестиугольник» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «шестиугольник» окружности, если измеренное по прямой расстояние между соседними вершинами шестиугольника равно 1.

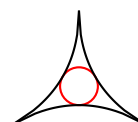
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$



В-4

Три графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «треугольник» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «треугольник» окружности, если радиус описанной окружности равен 1.

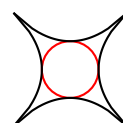
Ответ: $\frac{1}{4}$



В-5

Четыре графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «квадрат» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «квадрат» окружности, если радиус описанной окружности равен 1.

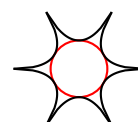
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$



В-6

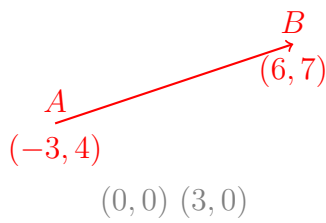
Шесть графиков параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «шестиугольник» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «шестиугольник» окружности, если радиус описанной окружности равен 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$



Задача 6

В-1 Рисунок (вид сверху) изображает такую ситуацию:

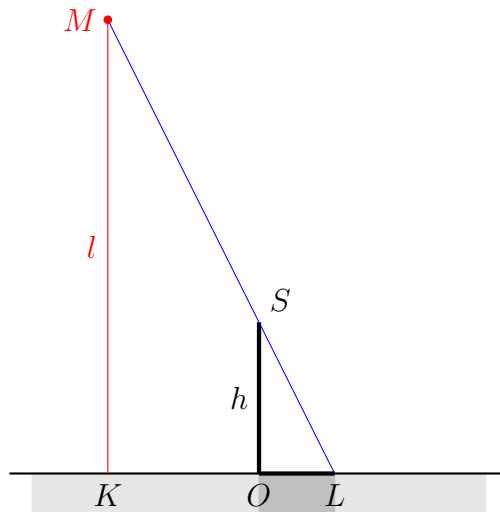


Ночь. На пустыре стоит секция сплошного забора высотой 2 метра (чёрная линия снизу). На постоянной высоте 6 метров из точки A в точку B (стрелка) летит очень яркий светлячок. Назовём точку на земле затенённой, если она хотя бы на мгновение оказалась в тени забора.

Какая площадь пустыря окажется затенённой?

Ответ: $\frac{159}{8}$

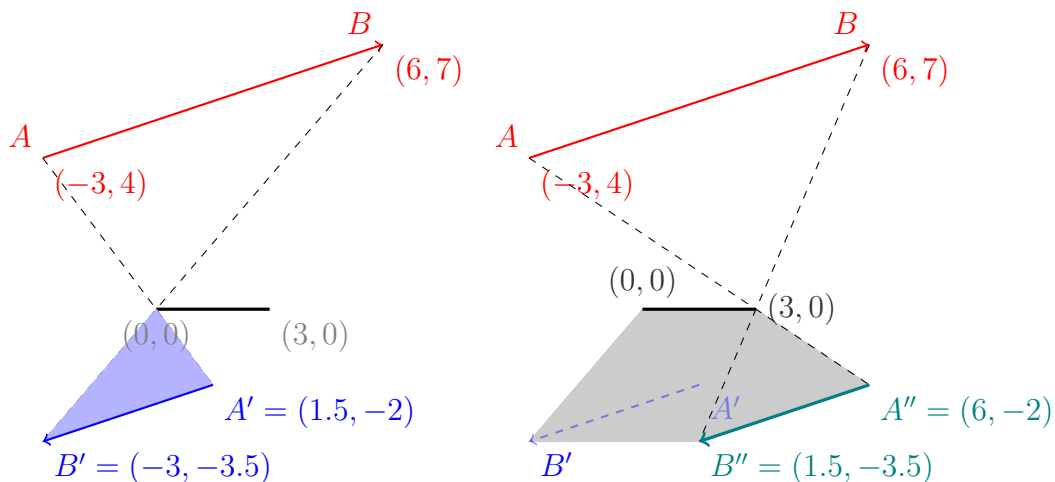
Решение. Сначала нужно понять размеры тени. Воткнём в пустырь столбик высотой h , разместим светлячка M на высоте l в произвольном месте и посмотрим на происходящее сбоку:



В данный момент тень — это отрезок OL . Заметим подобие $\triangle LKM$ и $\triangle LOS$. Из этого подобия следует, что если $l/h = k$, то $KO : OL = k - 1 : 1$. Значит, если светяк не меняет высоты, и забор тоже постоянной высоты, то k не меняется, и расстояние OL короче расстояния KO в фиксированное число раз, не зависящее от того, как далеко находится источник света.

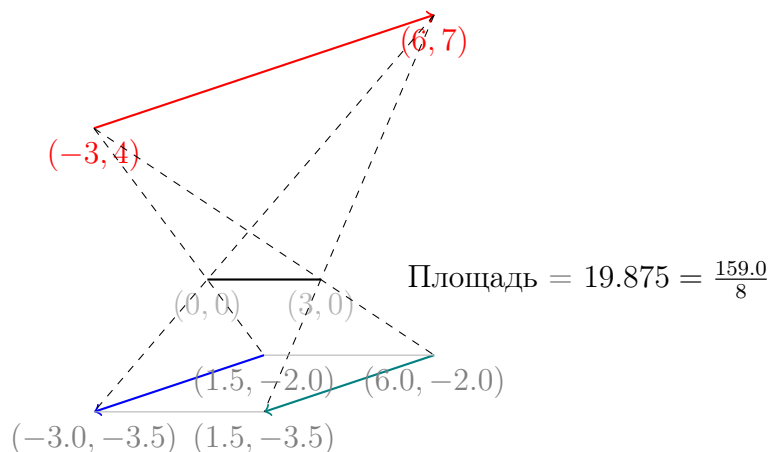
То есть, если светило летит по вектору AB , то тень от макушки столбика будет двигаться по вектору $A'B'$, который подобен AB с коэффициентом (в нашем случае) $1/2$.

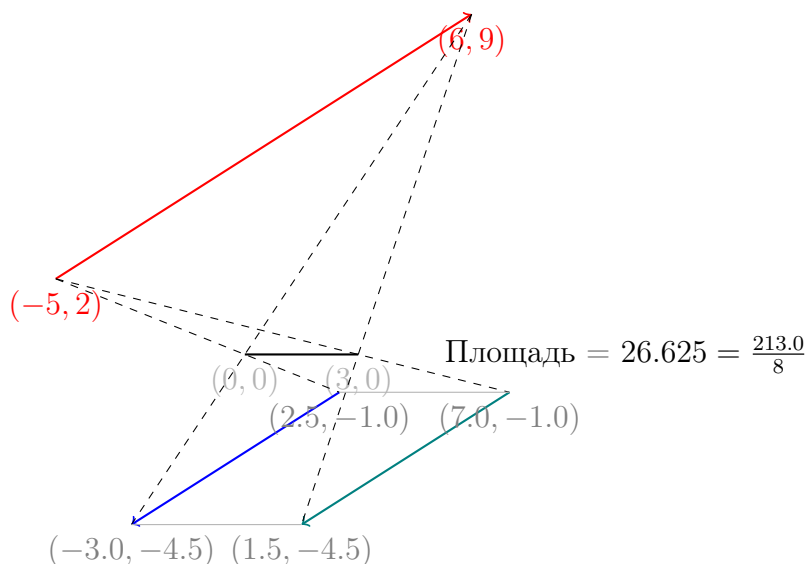
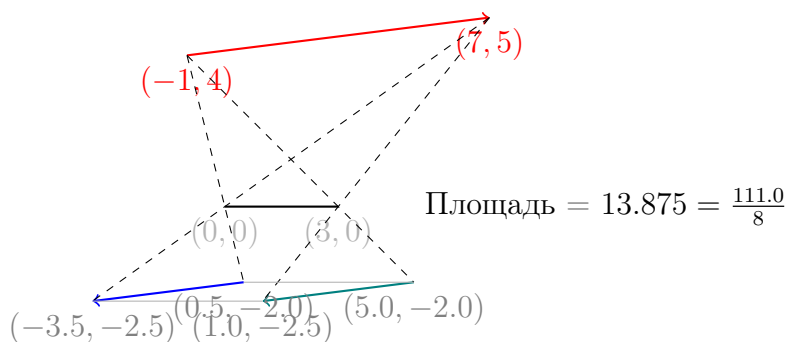
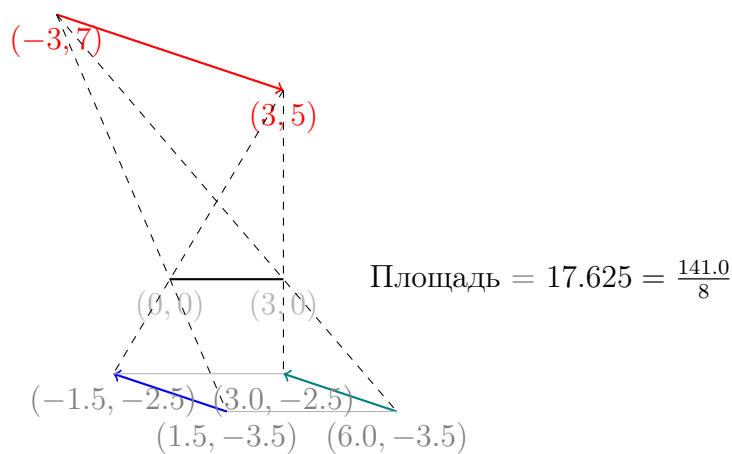
Например, находящаяся в $(0,0)$ опора забора за время бросает тень на точки синего треугольника (см. рисунок). На следующем рисунке — то, что загородил столбец в точке $(3,0)$ (зелёная стрелка) и общая площадь заслонённого забором (серая область).



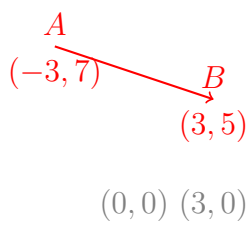
Значит, ответ — площадь серого пятиугольника, одна сторона которого — забор, а три оставшиеся вершины это A'' , B'' , B' . Координаты всех его вершин известны, найти его площадь — дело техники. Она равна $\frac{159}{8}$.

Вот чертежи для разных вариантов:





В-2 Рисунок (вид сверху) изображает такую ситуацию:

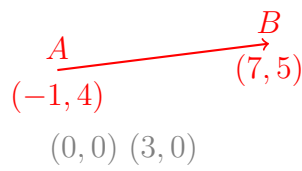


Ночь. На пустыре стоит секция сплошного забора высотой 2 метра (чёрная линия снизу). На постоянной высоте 6 метров из точки A в точку B (стрелка) летит очень яркий светлячок. Назовём точку на земле затенённой, если она хотя бы на мгновение оказалась в тени забора.

Какая площадь пустыря окажется затенённой?

Ответ: $\frac{141}{8}$

В-3 Рисунок (вид сверху) изображает такую ситуацию:

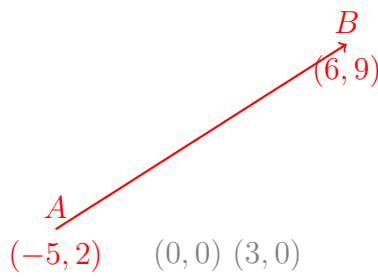


Ночь. На пустыре стоит секция сплошного забора высотой 2 метра (чёрная линия снизу). На постоянной высоте 6 метров из точки A в точку B (стрелка) летит очень яркий светлячок. Назовём точку на земле затенённой, если она хотя бы на мгновение оказалась в тени забора.

Какая площадь пустыря окажется затенённой?

Ответ: $\frac{111}{8}$

В-4 Рисунок (вид сверху) изображает такую ситуацию:



Ночь. На пустыре стоит секция сплошного забора высотой 2 метра (чёрная линия снизу). На постоянной высоте 6 метров из точки A в точку B (стрелка) летит очень яркий светлячок. Назовём точку на земле затенённой, если она хотя бы на мгновение оказалась в тени забора.

Какая площадь пустыря окажется затенённой?

Ответ: $\frac{213}{8}$

Задача 7

В-1 Вовочке вместо обычной тетради в клетку досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболами вида $y = \pm x^2 + c$, где $c \in \mathbb{Z}$. Система координат, в которой написаны эти уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см. Размер тетрадной страницы (высота \times ширина) равен 210×297 мм.

Клеточкой называется часть листа, со всех сторон ограниченная параболами и не пересекаемая другими параболами. Вовочка последовательно соединяет по прямой соседние вершины каждой клеточки, в результате чего у него получаются четырехугольники. Найдите наибольшую из площадей получившихся у Вовочки четырехугольников (внутри которых нет никаких проведённых Вовочкой линий).

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Решение. Рассмотрим сначала фигуру, образованную параболами

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 \\ y = 1 - \alpha x^2 \end{cases}$$

Площадь четырехугольника будет

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

Теперь посмотрим на четырехугольники, образованные следующими параболами:

$$A: y = \alpha x^2$$

$$B: y = \alpha x^2 + 1$$

$$C: y = -\alpha x^2 + k$$

$$D: y = -\alpha x^2 + 1 + k,$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Посмотрим на точки пересечения каждой из таких парабол.

$$\begin{aligned} A \cap C: \quad x &= \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}, \quad y = \frac{k}{2} \\ B \cap D: \quad x &= \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}, \quad y = \frac{k}{2} + 1 \\ A \cap D: \quad x &= \sqrt{\frac{k+1}{2\alpha}}, \quad y = \frac{k+1}{2} \\ B \cap C: \quad x &= \sqrt{\frac{k-1}{2\alpha}}, \quad y = \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

Четырёхугольники, получаемые Вовочкой - дельтоиды. Одна из диагоналей (вертикальная) у всех из-за параллельного переноса равна 1. Посчитаем вторую диагональ

$$d_2 = \sqrt{\frac{k+1}{2\alpha}} - \sqrt{\frac{k-1}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha \left(\sqrt{\frac{k+1}{2\alpha}} + \sqrt{\frac{k-1}{2\alpha}} \right)}$$

Рассмотрим функцию
$$f(k) = \frac{1}{\alpha \left(\sqrt{\frac{k+1}{2\alpha}} + \sqrt{\frac{k-1}{2\alpha}} \right)}$$

$$f'(k) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{1}{2\sqrt{k+1}} - \frac{1}{2\sqrt{k-1}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{-2}{2\sqrt{(k-1)(k+1)} (\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})} < 0$$

Получим, что площади таких четырёхугольников с увеличением k уменьшаются (вычисление производной — не единственный способ установить убывание функции). Значит, нужно вычислить площадь первого четырёхугольника.

Его площадь, так как он дельтоид, равна половине произведения диагоналей.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{\frac{2}{2\alpha}}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Эта площадь меньше той, что найдена в самом начале, так что наибольшей площадью остаётся $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

В-2 Вовочке вместо обычной тетради в клетку досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболоми вида $y = \pm 2x^2 + c$, где $c \in \mathbb{Z}$. Система координат, в которой написаны эти уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см. Размер тетрадной страницы (высота \times ширина) равен 210×297 мм.

Клеточкой называется часть листа, со всех сторон ограниченная параболоми и не пересекаемая другими параболоми. Вовочка последовательно соединяет по прямой соседние вершины каждой клеточки, в результате чего у него получаются четырёхугольники. Найдите наибольшую из площадей получившихся у Вовочки четырёхугольников (внутри которых нет никаких проведённых Вовочкой линий).

Ответ: $\frac{1}{2}$

В-3 Вовочке вместо обычной тетради в клетку досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболоми вида $y = \pm \frac{x^2}{2} + c$, где $c \in \mathbb{Z}$. Система координат, в которой написаны эти уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см. Размер тетрадной страницы (высота \times ширина) равен 210×297 мм.

Клеточкой называется часть листа, со всех сторон ограниченная параболоми и не пересекаемая другими параболоми. Вовочка последовательно соединяет по прямой соседние вершины

каждой клеточки, в результате чего у него получаются четырехугольники. Найдите наибольшую из площадей получившихся у Вовочки четырёхугольников (внутри которых нет никаких проведённых Вовочкой линий).

Ответ: 1

В-4 Вовочке вместо обычной тетради в клетку досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболоми вида $y = \pm \frac{3x^2}{4} + c$, где $c \in \mathbb{Z}$. Система координат, в которой написаны эти уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см. Размер тетрадной страницы (высота \times ширина) равен 210×297 мм.

Клеточкой называется часть листа, со всех сторон ограниченная параболоми и не пересекаемая другими параболоми. Вовочка последовательно соединяет по прямой соседние вершины каждой клеточки, в результате чего у него получаются четырехугольники. Найдите наибольшую из площадей получившихся у Вовочки четырёхугольников (внутри которых нет никаких проведённых Вовочкой линий).

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Задача 8

В-1 При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$$

(относительно неизвестной x) состоит из полуинтервала и точки (которая не принадлежит этому полуинтервалу и не является его концом)?

Ответ: При $a = e^{-1/e}$.

Решение. Пусть $\log_x a = t$. Тогда неравенство принимает вид

$$\frac{3}{t}x^2 - 2x - t \geq 0 \iff \frac{3x^2 - 2tx - t^2}{t} \geq 0 \iff \frac{(3x + t)(x - t)}{t} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t > 0, \\ (t + 3x)(t - x) \leq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} t < 0, \\ (t + 3x)(t - x) \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Число $t = \log_x a$ имеет тот же знак, что выражение $(x - 1)(a - 1)$, поэтому последняя совокупность может быть переписана в виде

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x - 1)(a - 1) > 0, \\ (\log_x a + 3x)(\log_x a - x) \leq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (x - 1)(a - 1) < 0, \\ (\log_x a + 3x)(\log_x a - x) \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (*)$$

Разобьём область допустимых значений переменных (x, a) для исходного неравенства, которая задаётся условиями $x > 0, x \neq 1, a > 0, a \neq 1$, на четыре области:

- I: $x > 1, a > 1$;
- II: $0 < x < 1, a > 1$;
- III: $0 < x < 1, 0 < a < 1$;
- IV: $x > 1, 0 < a < 1$.

В области I вторая система совокупности (*) решений не имеет, а первая равносильна двойному неравенству $x^{-3x} \leq a \leq x^x$.

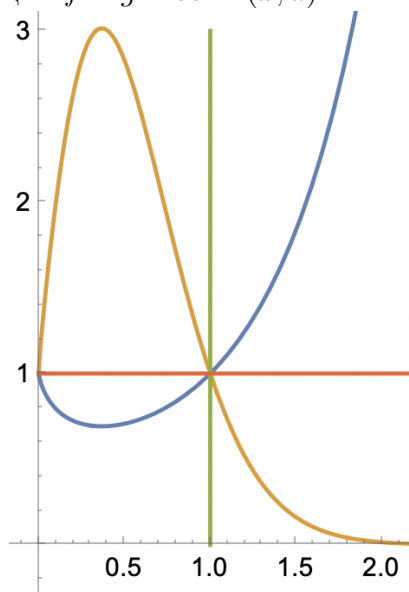
В области II первая система совокупности (*) решений не имеет, а вторая равносильна совокупности неравенств $a \geq x^{-3x}$, $a \leq x^x$.

В области III вторая система совокупности (*) решений не имеет, а первая равносильна двойному неравенству $x^{-3x} \geq a \geq x^x$.

В области IV первая система совокупности (*) решений не имеет, а вторая равносильна совокупности неравенств $a \leq x^{-3x}$, $a \geq x^x$.

Пусть $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, $g(x) = x^{-3x} = e^{-3x \ln x}$. Функция f имеет минимум в точке $x = e^{-1}$, убывает слева от неё и возрастает справа от неё. Функция g имеет максимум в точке $x = e^{-1}$, возрастает слева от неё и убывает справа от неё. Кроме того, $f(1) = g(1) = 1$, $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e}$, $g(e^{-1}) = (e^{-1})^{-3e^{-1}} = e^{3/e}$. Отсюда следует, что при $a \geq e^{-3/e}$ множество решений неравенства представляет собой объединение интервала и луча, при $1 < a < e^{-3/e}$ — объединение двух интервалов и луча, при $e^{-1/e} < a < 1$ — объединение двух интервалов, при $a = e^{-1/e}$ — объединение точки и не содержащего её полуинтервала, при $0 < a < e^{-1/e}$ — один интервал.

Для большей наглядности рассуждений из предыдущего абзаца изобразим графики функций f и g в осях (x, a) .



В-2 При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$$

(относительно неизвестной x) состоит из полуинтервала и точки (которая не принадлежит этому полуинтервалу и не является его концом)?

Ответ: При $a = e^{-2/e}$.

В-3 При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

(относительно неизвестной x) состоит из полуинтервала и точки (которая не принадлежит этому полуинтервалу и не является его концом)?

Ответ: При $a = e^{3/e}$.

В-4 При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

(относительно неизвестной x) состоит из полуинтервала и точки (которая не принадлежит этому полуинтервалу и не является его концом)?

Ответ: При $a = e^{4/e}$.